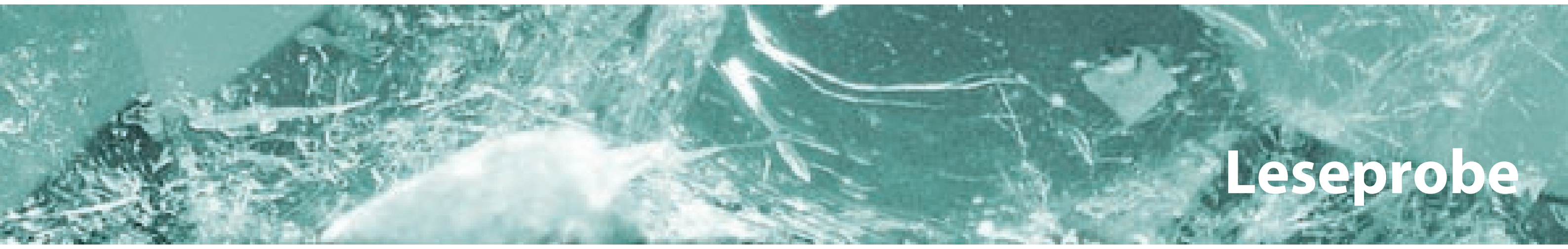

Schoening

Mathematik: Vorbereitung auf ein Studium

BRÜCKENKURS MATHEMATIK

Studienbrief 2-040-0010

1. Auflage 2011

HDL HOCHSCHULVERBUND DISTANCE LEARNING

Impressum

Verfasser: Dipl.-Kfm. Mirco **Schoening**

Dozent für Betriebliches Rechnungswesen, Steuerlehre und Mathematik
an der Fachhochschule Brandenburg

Der Studienbrief wurde auf der Grundlage des Curriculums für den studienvorbereitenden Brückenkurs „Mathematik“ verfasst. Die Bestätigung des Curriculums erfolgte durch den

Fachausschuss „Wirtschaftsingenieurwesen“,

dem folgende Mitglieder angehören:

Prof. Dr. Arnold (Technische Hochschule Mittelhessen), Prof. Dipl.-Ing. Demske (em.; FH Jena), Prof. Dr. Gehler, R. (Technische Hochschule Mittelhessen), Prof. Dr. Heyne (em., FH Jena), Prof. Dr. Hofmeister (FH Erfurt), Prof. Dr. Mottl (FH Jena), Prof. Dr. Nullmeier (em., HTW Berlin), Prof. Dr. Pumpe (Beuth HS für Technik Berlin), Rosemann, A., M.A. (Ostfalia Hochschule), Prof. Dr. Sadowski (WH Zwickau), Prof. Dr. Schmager (FH Jena), Prof. Dr. Schmeisser (HTW Berlin), Prof. Dr. Schwarz, M. (WH Zwickau), Prof. Dr. Söhnchen (HS Merseburg), Prof. Dr. Strunz (HS Lausitz, Senftenberg), Prof. Dr. Tippe (TH Wildau (FH)), Prof. Dr. Ungvári (TH Wildau (FH)), Prof. Dr. C. D. Witt (em., HS Wismar).

1. Auflage 2011 ISBN 978-3-86946-094-9

Redaktionsschluss: August 2011 Studienbrief 2-040-0010

Service-Agentur des HDL
(Hochschulverbund Distance Learning)

Leiter: Dr. Reinhard Wulfert

c/o Agentur für wissenschaftliche Weiterbildung und Wissenstransfer e. V.
Magdeburger Straße 50, 14770 Brandenburg

Tel.: 0 33 81 - 35 57 40 E-Mail: kontakt-hdl@aww-brandenburg.de
Fax: 0 33 81 - 35 57 49 Internet: http://www.aww-brandenburg.de

Inhaltsverzeichnis

Vorwort

Der Beginn eines wirtschaftswissenschaftlichen oder auch technischen Studiums setzt bei den Studierenden regelmäßig umfangreiche mathematische Kenntnisse voraus, die unabdingbar sind, um dem gebotenen Stoff folgen zu können. Dabei zeigt sich in vielen Fällen, dass gerade grundlegende mathematische Kenntnisse und Fertigkeiten nicht immer in hinreichendem Masse vorhanden sind. Die Ursachen dafür sind vielfältig. Zum einen erwerben die Studierenden auf sehr unterschiedlichen Wegen ihre Zugangsvoraussetzungen für ein Studium, zum anderen ist die Stoffvermittlung in den Schulen sehr unterschiedlich. Nicht zuletzt spielt auch das Bundesland eine Rolle, wo der Studierende bisher zur Schule ging. Fernstudierende sind beispielsweise oftmals schon mehrere Jahre im Beruf tätig – die Schulzeit liegt demzufolge längere Zeit zurück. Damit ist bestimmtes Wissen nicht immer sofort wieder abrufbar. Ein ganz schwerwiegendes Hindernis sei hier auch nicht verschwiegen: Viele Menschen haben schlichtweg Angst vor der Mathematik, erst recht vor der höheren Mathematik. Dass die Betätigung mit der Mathematik durchaus Freude und Zufriedenheit spenden kann, ist vielen nicht bewusst.

Mit dem vorliegenden Studienbrief, soll es den angehenden Studierenden ermöglicht werden, ausgehend von ihren individuellen Kenntnissen, systematisch in notwendige mathematische Instrumentarien (wieder) eingeführt zu werden. Dieser Prozess muss dabei unbedingt ein aktiver sein; das Lehrmaterial kann nur eine unterstützende Funktion dabei haben.

Die Zusammenstellung der Themen basiert auf der langjährigen Lehrerfahrung des Autors im Fach „Mathematik" und vielen durchgeführten Studienvorbereitungskursen.

Ganz bewusst soll hier nicht jedes Thema mit einem großen theoretischen Umfang bis ins letzte Detail vertieft werden. Zu diesem Zweck gibt es am Markt eine Reihe sehr guter Bücher, die je nach Bedarf den unterschiedlichen Ansprüchen gerecht werden. Hier sollen vielmehr praxisrelevante Themen behandelt werden und die Mathematik soll so in einer „natürlichen" Umgebung erlebt werden. Die Vermittlung wichtiger mathematischer Grundlagen wird dabei in vielen Fällen mit der praktischen Anwendung verknüpft und um notwendige theoretische Abhandlungen ergänzt. Zusätzlich zu den Ausführungen des Autors wird zur Ergänzung an passenden Stellen auf Auszüge aus anderen HDL-Studienbriefen verwiesen, die dem Leser die vertiefende Beschäftigung mit einzelnen Themen ermöglichen sollen (s. Studienbrief 2-040-0011, SCHOENING et al., 2011).

Einleitung

Antje, Judith und Martin wollen in Kürze mit einem Studium der Betriebswirtschaftslehre beginnen. Die Entscheidung dafür haben sie sich nicht leicht gemacht. Judith und Martin haben schon einige Sorgen, dass ihnen ihre nicht so gut ausgeprägten mathematischen Fähigkeiten noch erhebliche Probleme bereiten können. Antje war zwar schon in der Schule recht gut in Mathematik, teilt aber zum Teil die Bedenken der anderen. Vor der Entscheidung für ihr Studienfach haben sie sich dafür interessiert, ob man überhaupt ein Studium ganz ohne Mathematik absolvieren könne. Einige Fächer sind zwar nicht mathematisch geprägt, trotzdem begegnet die Mathematik einem aber auch dort an vielen Stellen ganz unverhofft.

Die Mathematik durchzieht das ganze Leben, man kann sich ihr nicht völlig entziehen.

Nun studieren die drei Freunde also Betriebswirtschaftslehre in einem Bachelor-Studiengang. Der Blick auf die Stundentafel zeigt ihnen, dass gleich im ersten Semester Fächer wie „Mathematik", „Statistik" und „Rechnungswesen" auf dem Plan stehen. Das wird sicher sehr anspruchsvoll, sagen sich die drei, und nehmen die Herausforderung ernst.

Rechtzeitig vor Studienbeginn wurde ihnen ein Vorbereitungskurs empfohlen, wo bestimmte Themen noch einmal wiederholt und gefestigt werden können. Und das Beste daran ist, dass es keine Noten gibt. So braucht keiner Angst haben, hier zu versagen.

In diesem Studienbrief werden wir die drei immer wieder treffen und sie bei ihren mathematischen Fortschritten begleiten.

1 Zahlenbereiche

Viele Bücher beginnen mit der Behandlung der Grundrechenarten. Diese sollen im vorliegenden Studienbrief als bekannt vorausgesetzt werden. Schon in der Schule erfährt man, dass es unterschiedliche Zahlenbereiche gibt (vgl. Bild 2.1):

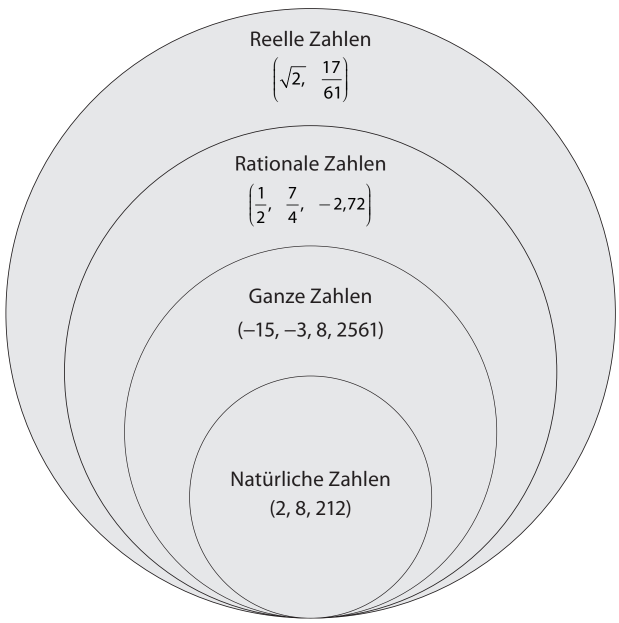

Bild 2.1 Zahlenbereiche mit Beispielen

Diese Zahlenbegriffe sind jedem weitgehend vertraut. Aber wodurch unterscheiden sich die einzelnen Bereiche und wozu gibt es überhaupt mehrere davon?

Im Folgenden werden die verschiedenen Zahlenbereiche vorgestellt. Ihr Verständnis erleichtert Ihnen das Verständnis der folgenden Themen.

Exkurs

In der **Anlage 1 „Zahlenbereiche"** (s. Studienbrief 2-040-0011, SCHOENING et al., 2011) werden Ihnen die verschiedenen Zahlenbereiche vorgestellt. Das Studium dieses Textes und die Bearbeitung der angegebenen Übungsaufgaben (Lösungen am Ende der jeweiligen Anlage) erleichtern Ihnen das Verständnis der Themen in den folgenden Kapiteln.

2 Gleichungen und Ungleichungen

Den grundlegenden Umgang mit den verschiedenen Zahlenbereichen haben unsere drei Studenten nun wiederholt. In diesem Kapitel soll nun auf ein Thema mit stärkerem Praxisbezug eingegangen werden.

Viele Problemstellungen in der Praxis müssen zunächst in eine mathematische Formulierung übersetzt werden, da nur in der Formalschreibweise eine Ausgangsbasis für die Lösung besteht. Hierbei entstehen häufig Gleichungen mit einer oder mehreren unbekannten Größen.

Studienziel dieses Kapitels ist es nun,

Studienziel

- das Lösen von Gleichungen zu behandeln. Hier ist es vor allem von großer Bedeutung, zunächst eine Gleichung für das Problem zu entwickeln und diese dann umzuformen, um die angestrebte Lösung zu erhalten. Hierbei sind Regeln einzuhalten, damit das Gleichheitszeichen weiter gültig bleibt. Man spricht dabei von äquivalenten Umformungen.

2.1 Gleichungen

Das Lösen von Gleichungen gehört in vielen Anwendungsbereichen zum Alltag. Schon einfache Grundprobleme lassen sich nur über eine Gleichung lösen.

Beispiel

B 2.1 Zum Beispiel plant Antje zu ihrem Geburtstag eine Party. Da das Budget von Studenten immer knapp ist, muss sie daher genau planen, wie viele Freunde und Bekannte sie einladen kann. Für die gesamte Party will sie insgesamt 150 € ausgeben. Für eine Portion Essen und dazugehörige Getränke veranschlagt sie 7,50 €. Aus diesen beiden Werten ergibt sich, dass sie demzufolge 20 Personen einladen kann, wenn das Budget eingehalten werden soll.

Die gesuchte Größe x ist hier die Anzahl der einzuladenden Gäste. Diese ergibt sich aus folgender Rechnung:

$$x = \frac{150\text{ €}}{7{,}50\text{ € / Person}} = 20\text{ Personen}$$

Natürlich ist das eine sehr einfache Anwendung. Es zeigt jedoch deutlich, dass Gleichungen überall auftauchen können.

Merksatz

Gleichungen stellen stets eine Abstraktion eines realen Sachverhaltes dar. Eine Aussage bzw. ein Problem wird hierbei in eine formale Aussage überführt. Diese formale Aussage ermöglicht dann die Anwendung mathematischer Instrumentarien, um das Ausgangsproblem zu lösen.

Was ist nun eine Gleichung prinzipiell?

Definition

Eine **Gleichung** ist eine mathematische Aussage, bei der eine unbekannte Größe, eine Variable vorkommt.

Das Lösen der Gleichung besteht dann in der Ermittlung einer oder auch mehrerer Lösungen, die für die Variable eingesetzt werden können wobei die Gleichung trotzdem eine wahre Aussage bleibt.

Je nach Typ der Gleichung können mehrere Lösungen für eine Gleichung resultieren.

Eine **lineare Gleichung** hat beispielsweise immer nur eine (oder keine) Lösung.

Lineare Gleichungen

Die Gleichung $3x + 6 = 18$ ergibt etwa nur die Lösung $x = 4$. Das Einsetzen anderer Werte in die Gleichung würde zu einer falschen Aussage führen. Damit hätte dann das Gleichheitszeichen seine Existenzberechtigung an der Stelle verloren und es würde keine Gleichung mehr bestehen.

Bei Gleichungen, die mehrere Lösungen haben, nennt man die Gesamtheit aller zulässigen Lösungen auch **Lösungsmenge**. Dieser Begriff spielt auch bei der Lösung von Ungleichungen eine wichtige Rolle. Diesem Punkt wenden wir uns später zu.

Nicht immer kommt in einer (linearen) Gleichung die gesuchte Variable nur einmal vor. In einem solchen Fall müssen wir zunächst eine Zusammenfassung der Gleichung vornehmen, um die Aussage wieder auf eine Gleichung mit der einmaligen Nennung der Variablen zu reduzieren.

Lösung einer linearen Gleichung

Betrachten wir z. B. folgende Gleichung:

$$3x - 7 + 5 = x + 6 \quad .$$

Diese Gleichung muss durch sogenannte äquivalente Umformungen vereinfacht werden.

In diesem Beispiel ist es sinnvoll, dass die Variable x nur auf einer Seite der Gleichung vorkommt. Dazu wird x auf beiden Seiten subtrahiert:

$$2x - 7 + 5 = 6$$

Dann werden die konstanten Werte auf der linken Seite zusammengefasst: Das ergibt den Wert -2. Nun wird auf beiden Seiten der Gleichung 2 addiert:

$2x = 8$

Zum Schluss werden beide Seiten der Gleichung durch 2 dividiert. Dadurch wird die gesuchte Variable vollkommen freigelegt und die Lösung kann direkt abgelesen werden:

$x = 4$. Damit ist die Gleichung gelöst.

Da es sich um eine lineare Gleichung handelt, existiert nur diese eine Lösung.

Etwas schwieriger gestaltet es sich, wenn in der Ausgangsgleichung zusätzlich noch Klammerausdrücke enthalten sind. In einem solchen Fall müssen zunächst die Klammern aufgelöst werden.

Dabei ist unbedingt auf etwaige Vorzeichen zu achten! So gilt zum Beispiel:

$-(x - y) = -x + y$.

Die Vorzeichen in der Klammer wurden durch das negative Vorzeichen vor der Klammer „getauscht".

Mögliche Äquivalenzumformungen in einer Gleichung sind:

- Addition des gleichen Terms auf beiden Seiten,
- Subtraktion des gleichen Terms auf beiden Seiten,
- Multiplikation beider Seiten mit dem gleichen Term (**ungleich Null!**).
- Division beider Seiten durch den gleichen Term (**ungleich Null!**).

Beispiel

B 2.2 **Lösung einer linearen Gleichung**

$$
\begin{aligned}
(2x - 1)(3x + 4) &= (2 - x)(5 - 6x) && |\ \text{Ausmultiplizieren} \\
6x^2 + 8x - 3x - 4 &= 10 - 12x - 5x + 6x^2 && |\ -6x^2 \\
5x - 4 &= 10 - 17x && |\ +17x + 4 \\
22x &= 14 && |\ :22 \\
x &= 7/11
\end{aligned}
$$

Quadratische Gleichungen

In der Praxis gibt es auch Beispiele für die Anwendung quadratischer Gleichungen.

Beispiel

B 2.3 Aufgabe: Eine Gruppe von Studenten plant eine Studienfahrt. Dafür soll ein Bus gemietet werden. Die Kosten betragen pauschal 120 € für den Bus. Die Kosten sollen gleichmäßig auf die Studenten verteilt werden. Wenn noch zwei Studenten mehr mitfahren würden, dann könnten sich die Fahrtkosten pro Student um 0,25 € verringern.

Wie viele Studenten planen derzeit diese Fahrt?

Lösung: Um dieses Problem zu lösen, muss zunächst eine Gleichung aufgestellt werden:

Wir wollen nun eine Gleichung für die Fahrtkosten pro Student aufschreiben. Der linke Teil der Gleichung stellt die Kosten pro Student bei der derzeit geplanten Teilnehmerzahl x dar. Im rechten Teil der Gleichung wird der Pauschalbetrag von 120 € für den Bus zunächst durch die um zwei Studenten erhöhte Teilnehmerzahl x + 2 dividiert. Da der Beitrag pro Mitfahrer in diesem Fall aber um 0,25 € pro Student geringer sein soll, wird dieser Wert einfach auf der rechten Seite addiert, damit so das Gleichheitszeichen gilt:

$$\frac{120}{x} = \frac{120}{x+2} + 0{,}25$$

$$\frac{120(x+2)}{x} = 120 + 0{,}25(x+2)$$

$$\frac{120x+240}{x} = 120 + 0{,}25x + 0{,}5$$

$$120x + 240 = 120x + 0{,}25x^2 + 0{,}5x$$

$$0{,}25x^2 + 0{,}5x - 240 = 0 \quad \rightarrow \quad x^2 + 2x - 960 = 0$$

Merksatz

Diese **quadratische Gleichung in Normalform** ($x^2 + px + q = 0$)kann mit Hilfe der **p-q-Formel** gelöst werden:

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q} \qquad (2.1)$$

Die Lösung für das Beispiel B 2.4 ergibt sich dann wie folgt:

$$x_{1,2} = -1 \pm \sqrt{1+960}$$

$$x_{1,2} = -1 \pm 31$$

Es ergeben sich für x also zwei Lösungen. Die erste Lösung lautet $x = 30$ und die zweite Lösung $x = -32$.

Da es um die Anzahl von Studenten geht, ist nur die erste Lösung sinnvoll.

Es hatten also zunächst 30 Studenten eine Studienfahrt geplant. Dabei würde jeder Student 4,00 € bezahlen. Da dann zwei Teilnehmer mehr mitfahren, wird der Pauschalbetrag von 120 € durch 32 Mitfahrer geteilt und es ergibt sich 3,75 € pro Person, also genau 0,25 € pro Student weniger.

Gleichungen höheren Grades

Gleichungen höheren Grades lassen sich unter Umständen durch Substitution auf eine quadratische Form bringen, so dass die Lösungsmenge unkompliziert ermittelt werden kann.

Beispiel

B 2.4 Die Gleichung $x^6 + 2x^3 - 3 = 0$ soll mit der **Substitutionsmethode** gelöst werden. Dazu wird x^3 durch y substituiert. Damit ergibt sich folgende Gleichung:

$$y^2 + 2y - 3 = 0$$

Dies ist eine quadratische Gleichung in Normalform und mit der p-q-Formel lässt sich so die Lösungsmenge ($L = \{x_1, x_2\}$) leicht bestimmen:

$$y_{1,2} = -1 \pm \sqrt{1+3}$$

$$y_{1,2} = -1 \pm 2$$

Damit ergeben sich zwei Lösungen für die quadratische Gleichung:

$$L = \{-3, 1\}$$

Zu beachten ist allerdings, dass das noch nicht die Lösung der Ausgangsgleichung ist. Diese erfordert eine Rücksubstitution:

$$y_1 = x_1^3 = 1 \rightarrow x_1 = \sqrt[3]{1} = 1$$

$$y_2 = x_2^3 = -3 \rightarrow x_2 = \sqrt[3]{-3} = -1{,}4422$$

Damit haben wir die Lösungsmenge für die Ausgangsgleichung ermittelt[1]:

$$L = \{1, -1{,}4422\}$$

Nicht immer lässt sich eine Gleichung höheren Grades in eine derart einfache Form überführen wie in Beispiel B 2.4.

Im Folgenden soll eine Gleichung höheren Grades mit einem anderen Verfahren gelöst werden:

$$x^3 - 6x^2 - 13x + 42 = 0 \,.$$

Mit Hilfe der vorgenannten Methoden ist diese Gleichung nicht zu lösen.

Da es sich hier um ein Polynom dritten Grades handelt, kann die Gleichung maximal 3 Lösungen aufweisen.

Wenn es gelingt, eine Lösung zu finden/zu raten, gestaltet sich der weitere Verlauf recht einfach.

---

1 **Hinweis:** Eine Wurzel aus einer negativen Zahl kann nur bei **ungeradem** Wurzelexponent gezogen werden (gilt jedenfalls im Bereich der reellen Zahlen). – Im Zahlenbereich der **komplexen Zahlen** ist auch das Ziehen der Quadratwurzel aus einer negativen Zahl möglich. Darauf soll hier jedoch nicht näher eingegangen werden.

Dies ist nur möglich, wenn es sich um eine ganzzahlige Lösung handelt.

Im vorliegenden Fall lässt sich durch Einsetzen kleinerer ganzer Zahlen relativ schnell ermitteln, dass die Gleichung an der Stelle x = 2 eine Lösung hat:

$$\begin{aligned} & \qquad\qquad x=2 \\ & \qquad\qquad\ \downarrow \\ x^3-6x^2-13x+42 &= 2^3-6\cdot 2^2-13\cdot 2+42=0 \\ &= 8-24-26+42 \\ &= 50-50=\underline{\underline{0}} \end{aligned}$$

Für jede Lösung einer solchen Gleichung lässt sich ein Linearfaktor bilden.

Ein **Linearfaktor** ist ein Term, der durch Einsetzen der Lösung den Wert Null ergibt.

In unserem Beispiel ist der Linearfaktor also $(x - 2)$.

Um die gesamte Lösungsmenge zu ermitteln, wird das Polynom durch diesen Linearfaktor dividiert; es wird eine Polynomdivision durchgeführt.

Dem ungeübten Leser erscheint dieser Vorgang möglicherweise etwas ungewohnt. Es wird jedoch schnell erkennbar, dass hier eine schriftliche Division wie folgt durchgeführt werden kann:

$$\begin{array}{l} \quad x^3-6x^2-13x+42:(x-2)=x^2-4x-21 \\ -(x^3-2x^2) \\ \qquad -4x^2-13x \\ \quad -(-4x^2+8x) \\ \qquad\qquad -21x+42 \\ \qquad\quad -(-21x+42) \\ \qquad\qquad\qquad 0 \end{array}$$

Im Ergebnis der Polynomdivision ergibt sich eine quadratische Funktion (Gleichung). Deren Nullstellen (Lösungen) lassen sich nun wiederum mit der p-q-Formel bestimmen:

$$x_{1,2}=2\pm\sqrt{4+21}=2\pm 5 \quad .$$

Damit stehen die beiden weiteren Lösungen fest.

Die Ausgangsgleichung hat damit auch Lösungen für $x = 7$ und für $x = -3$.

Schließlich lässt sich das Ausgangspolynom als **Produkt der Linearfaktoren** schreiben:

$$(x-2)(x-7)(x-3)=0 \quad .$$

Die Gleichung bleibt eine wahre Aussage für jede ermittelte Lösung, d. h.:

$$L=\{2,7,-3\}$$

Mit den hier beschriebenen standardisierten Verfahren lassen sich aber nicht alle Gleichungen lösen.

In solchen Fällen, wo das nicht geht, bietet sich das **Newton-Verfahren** an, mit dem sehr gute Näherungslösungen erzielt werden können. Allerdings erfordert dies zunächst eine Beschäftigung mit der Differentialrechnung, die in Kapitel 5 erfolgen wird.

Zum besseren Verständnis der folgenden Inhalte dient an dieser Stelle die Bearbeitung von **Anlage 2 „Ungleichungen"** (s. Studienbrief 2-040-0011, SCHOENING et al., 2011) samt Übungsaufgaben (Lösungen am Ende der Anlage)**.**

3 Lösen von linearen Gleichungssystemen

Bisher wurden nur Gleichungen mit einer Variablen behandelt. Durch entsprechendes Umformen und Anwenden der möglichen Verfahren konnte die entsprechende Lösungsmenge ermittelt werden.

Studienziele

- Da in der Praxis aber auch komplexere Fragestellungen vorkommen, bei denen gleich mehrere Variablen bestimmt werden müssen, wollen wir uns in diesem Kapitel mit der Bearbeitung derartiger Probleme befassen.

☺ Hier wenden wir uns wieder den drei Studenten Antje, Martin und Judith zu. Von einigen Studenten höherer Semester haben sie zu diesem Thema wenig Gutes gehört: Das Lösen von Gleichungssystemen soll eine sehr komplizierte Angelegenheit sein und die Erfolgsaussichten seien jedoch eher gering.

Mit derartig entmutigenden Aussagen wollen sich die drei Freunde nicht zufriedengeben und beschließen, den Ausführungen genau zu folgen. Doch vorher wollen sie unbedingt ein Beispielproblem kennenlernen, dessen Lösung über ein Gleichungssystem führt. Martin blättert in einem Buch mit mathematischen Knobelaufgaben und findet tatsächlich etwas Passendes:

Beispiel

B 3.1 Ein Vater war vor zwei Jahren noch dreimal so alt wie sein Sohn. In fünfzehn Jahren wird der Vater nur noch doppelt so alt sein wie sein Sohn.

Wie alt sind Vater und Sohn heute?

☺ Judith lacht, als Martin diese so einfach wirkende Aufgabe vorliest. Sie meint, allein durch Ausprobieren kann man diese Aufgabe lösen. Doch Antje und Martin halten das für keine gute Idee und wollen hier etwas genauer hinschauen.

Lösung: In der Aufgabenstellung erhalten wir zwei konkrete Informationen. Damit eine Lösung ermittelt werden kann, ist es notwendig, alle gewonnenen Informationen zunächst in eine Formalschreibweise zu überführen. Für das aktuelle Alter des Vaters setzen wir die Variable v und für das Alter des Sohnes die Variable s an. Es sind zwei Variablen, deren Wert nun ermittelt werden soll.

Aus der Gleichung 5.37 folgt in Verbindung mit der bekannten Ableitung der Wurzelfunktion $f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$:

$$y=\frac{1}{2\sqrt{4}}\cdot(x-4)+\sqrt{4}=\frac{1}{4}x+1 \quad (\text{mit } x_0=4) \tag{5.38}$$

Die Funktion f(x) und ihre Tangente im Punkt P(4, 2) an der Stelle $x_0 = 4$ zeigt Bild 5.15:

Bild 5.15 Wurzelfunktion und eine angelegte Tangente an der Stelle $x_0 = 4$

5.6 Extremwertprobleme

Antje, Judith und Martin haben sich wieder einmal eine Pause verdient. Sie haben in den letzten Vorlesungsstunden eine Menge über Funktionen und deren Ableitungen gelernt. Nun wollen sie jedoch endlich mal etwas Praktisches machen und freuen sich auf die angekündigten Beispiele zum Thema „Extremwertaufgaben". Hier soll also die Mathematik helfen, ein Problem nicht nur zu lösen, sondern auch gleich noch das optimale Ergebnis zu finden. So sind sie sehr motiviert, in den folgenden Ausführungen eine spannende Seite der Mathematik kennenzulernen.

Zunächst machen sie sich aber auf den Weg zur Mensa, um sich etwas zu stärken. Da sie aber irgendwie alle drei gerade etwas knapp bei Kasse sind, schlägt Martin vor, das Geld zusammenzulegen und davon optimal viele Speisen und Getränke zu kaufen, sodass eine bestmögliche Sättigung erfolgt und keiner mehr durstig ist. Antje lächelt und meint, dass man aus diesem Problem ja durchaus eine mathematische Aufgabe machen könne. Judith wirft jedoch ein, dass die optimale Speise nicht nur vom Preis, sondern auch von der Menge, vom Geschmack und von den Zutaten abhängt. Dadurch hängt der maximale Nutzen dann nicht nur von einer Veränderlichen, sondern gleich von mehreren ab. Das ist mathematisch durchaus lösbar, fällt aber in den Bereich der linearen Optimierung und würde den Umfang dieses Studienbriefes etwas sprengen. Deswegen bleiben wir bei Problemen für Funktionen mit einer Variablen.

5.6.1 Das Hühnerhofproblem

Wenden wir uns also einem ersten **Extremwertproblem** zu: Ein Bauer will ein Areal seines Hofes für seine Hühner einzäunen. Er hat in der Scheune noch eine Rolle Maschendrahtzaun gefunden; Pfosten sind auch genug da. Auf der Rolle befinden sich 100 Meter Zaun. Der Bauer will nicht noch extra eine weitere Rolle dazukaufen. So beschließt er, mit dem vorhandenen Material eine möglichst große Fläche einzuzäunen, damit so viele Hühner wie möglich innerhalb dieser Umzäunung gehalten werden können. Wir wollen der Einfachheit halber vereinbaren, dass der Hühnerhof eine Rechteckform haben soll. Zunächst probiert er einige Varianten aus (vgl. Tabelle 5.2):

Seitenlänge a	Seitenlänge b	Flächeninhalt
5 m	45 m	225 m^2
10 m	40 m	400 m^2
15 m	35 m	525 m^2
20 m	30 m	600 m^2
25 m	25 m	625 m^2

Tabelle 5.2 Mögliche Seitenlängen des Hühnerhofes

Mit jeder Änderung der Seitenlängen hat sich der Flächeninhalt erhöht; teilweise recht erheblich. Man könnte sicherlich durch Ausprobieren irgendwann ein einigermaßen gutes Resultat erzielen, vielleicht durch Zufall auch das optimale. Da das jedoch Zeit kostet, wollen wir effizient vorgehen und uns unsere nun schon recht umfassenden mathematischen Kenntnisse zunutze machen.

Dazu müssen wir das Ausgangsproblem zunächst in eine **formale Schreibweise** überführen, denn mathematisch können nur solche Sachverhalte gelöst werden. Hier beginnt quasi schon ein Einstieg in die **mathematische Modellierung**. Das bedeutet, dass ein beliebiger Sachverhalt in die mathematische Sprache übersetzt werden muss. Zu einem Realproblem wird ein isomorphes (d. h. strukturgleiches) Formalproblem konstruiert und dieses wird dann mit Hilfe mathematischer Methoden gelöst. Die Lösung wird schließlich wieder auf das Realproblem übertragen.

Mathematische Modelle begegnen uns in allen Wissenschaften. Manche behaupten, Wissenschaft sei nichts anderes als die mathematische Formulierung fachspezifischer Probleme. Die mathematische Modellierung kommt tatsächlich in allen technisch-wissenschaftlichen Bereichen, aber auch im alltäglichen Leben vor.

Sicherlich ist es anmaßend, zu behaupten, mit dem Hühnerhofproblem steigen wir in die mathematische Modellierung ein – einen Vorgeschmack darauf gibt es allemal.

Wir beginnen nun, indem wir zunächst eine Formel für den Umfang u des abgezäunten Bereiches aufstellen:

$$u = 2a + 2b = 100 \tag{5.39}$$

Die Variablen a und b seien die Seitenlängen unseres Hühnerhofes. Wie unschwer zu erkennen ist, treten in der Gleichung 5.39 allerdings zwei unabhängige Variablen auf. Dieser Umstand lässt sich recht schnell beseitigen. Die Summe aus einer Seite a und einer Seite b muss 50 Meter betragen (folgt aus Umformung von Gl. 5.39), demzufolge gilt, dass $b = 50 - a$ ist.

Der Flächeninhalt A des eingezäunten Areals ergibt sich als Produkt von a und b.

Nach Einsetzen von $b = 50 - a$ ergibt sich damit folgende Funktion f(a), mit der der Flächeninhalt f berechnet werden kann:

$$f(a) = a \cdot b = a \cdot (50 - a) = 50a - a^2 \ . \tag{5.40}$$

Wir erinnern uns, dass wir ein optimales Ergebnis für den Flächeninhalt in Abhängigkeit der Wahl der Seitenlängen für das Rechteck bestimmen wollen. Dazu wird die Ableitung der Funktion f(a) gebildet:

$$f'(a) = 50 - 2a \tag{5.41}$$

Um einen **Extremwert** zu erhalten, muss als **notwendige Bedingung** die erste Ableitung eine Nullstelle haben. Wir setzen die erste Ableitung demzufolge gleich Null und ermitteln einen Wert für a, der diese Gleichung erfüllt:

$$f'(a) = 50 - 2a = 0 \rightarrow 50 = 2a \rightarrow a = 25 \ . \tag{5.42}$$

Es ist also vorstellbar, dass die Fläche maximal wird, wenn die Seite a 25 Meter lang ist, was automatisch bedeuten würde, dass dann die Seite b die gleiche Länge hat und unser Rechteck seine Sonderform als Quadrat hat. Doch zunächst müssen wir die zweite Ableitung überprüfen. Denn diese muss an der Stelle $a = 25$ einen negativen Wert haben. Das ist die **hinreichende Bedingung** für das Vorliegen eines Maximalwertes:

$$f''(a) = -2 \ . \tag{5.43}$$

Die zweite Ableitung ist eine konstante Funktion und hat auch an der Stelle $a = 25$ einen negativen Wert.

Damit ist nachgewiesen, dass der Hühnerhof die maximale Fläche erhält, wenn er als Quadrat mit einer Seitenlänge von 25 Metern eingezäunt wird (Wie noch aus Tabelle 6.2 bekannt ist, beträgt der Flächeninhalt immerhin 625 m^2.).

In der „modernen Bodenhaltung“ geht man heute von 7 Hennen pro m^2 aus. Das bedeutet, dass der Bauer maximal 4.375 Hennen innerhalb seines Zaunes halten kann.

Das klingt für einen Tierfreund doch etwas grausam. Das Beispiel soll aber nur zeigen, welche maximale Fläche zur Verfügung gestellt werden kann. In der „Freilandhaltung“ sind es übrigens $4m^2$ pro Tier. Wenn unser Bauer Eier aus Freilandhaltung verkaufen will, kann er auf dieser Fläche etwa 156 Hühner halten. Es ist damit auch verständlich, warum Freilandeier deutlich teurer sind.

Das folgende Bild 5.16 zeigt zeigt die Funktion aus Gl. 5.40 in einer graphischen Darstellung, die noch einmal gut unser Ergebnis bestätigt:

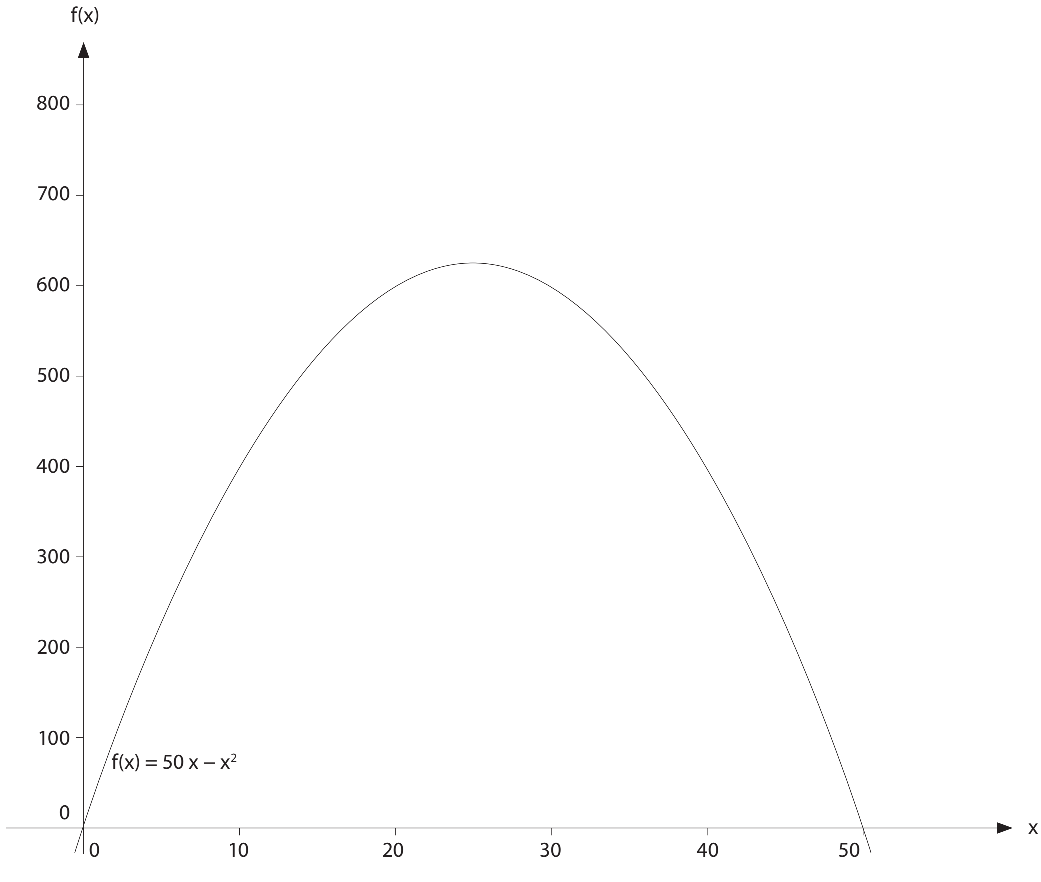

Bild 5.16 Graphische Darstellung des Hühnerhofproblems

Im folgenden Fall wenden wir uns einer ökonomischen Problematik zu.

5.6.2 Ein Beispiel zur Kostenminimierung

Ein Unternehmer benötigt zur Herstellung eines Produktes Rohlinge. Er benötigt davon jährlich 1.000 Stück. Ein Rohling kostet 28 Euro. Er will diesen Bedarf durch mehrere gleich große Lieferungen (n) im Jahr decken. Jede einzelne Lieferung kostet 60 Euro.

Der Unternehmer würde also am günstigsten kalkulieren, wenn er die ganzen 1.000 Stück Jahresbedarf in einer Lieferung ordert. Das würde aber unsere Aufgabe zu einfach werden lassen.

Deswegen betrachten wir noch eine weitere Komponente: Die Lagerung der Rohlinge kostet pauschal 3 Euro pro Stück pro Jahr. Das ergibt sich aus den Kosten für den Lagerplatz und den Zinsen, die für gebundenes Kapital immer zu berücksichtigen sind.

Damit setzt sich die Kostenfunktion K für unser Beispiel aus den Kosten für die Rohlinge, deren Transport und deren Lagerung zusammen:

$$K(x, n) = 28 \cdot 1.000 + 60 \cdot n + 3 \cdot x \tag{5.44}$$

Wir setzen $x = 1.000/n$ in die Gleichung ein:

$$K(n) = 28.000 + 60 \cdot n + \frac{3.000}{n} \tag{5.45}$$

Die veränderliche Variable ist nun n, die Gesamtkosten werden also abhängig gemacht von der Anzahl der Lieferungen. Wir wollen möglichst geringe Gesamtkosten haben. Daher muss die Funktion aus Gl. 5.45 abgeleitet werden und die Nullstelle der ersten Ableitung bestimmt werden:

$$K'(n) = 60 - \frac{3000}{n^2} = 0 \rightarrow n = \sqrt{50} \rightarrow n \approx 7{,}07 \tag{5.46}$$

In dieser Aufgabe wurde bewusst davon abgesehen, ein „glattes“ Ergebnis zu liefern, wie es häufig in Lehrbüchern vorkommt. Die Praxis ist auch nicht „glatt“. Vielmehr sind wir angehalten, das mathematisch optimale Ergebnis so zu interpretieren, dass eine optimale praktikable Lösung am Ende steht. Im vorliegenden Fall bedeutet das, dass im Jahr 6 Lieferungen zu je rund 143 Rohlingen und eine Lieferung mit nur 142 Stück zur geringsten Kostenbelastung führen. Dieser reale Kostenbetrag liegt aber trotzdem etwas höher als die rein mathematisch optimale Lösung, die jedoch nicht möglich ist, da nur ganze Rohlinge beim Unternehmer willkommen sind und der Lieferant auch beim besten Bemühen nicht weiß, wie er den Kunden siebenmal und dann noch 0,07-mal beliefern sollte.

Nach der Interpretation des Ergebnisses, das wir hier mathematisch gesehen etwas voreilig betrachtet haben, soll der guten Ordnung halber nun auch noch formal das Resultat bestätigt werden. Eine solche Vorgehensweise ist notwendig, um grundsätzlich eine genaue Analyse eines Sachverhaltes vorzunehmen.

In Gleichung 5.46 steht, dass $n = \sqrt{50}$ ist. Das ist zwar richtig.

Allerdings ist die Wurzel aus 50 nicht unbedingt nur (7,07…), sondern auch die Zahl –7,07… erfüllt die Gleichung. Letzterer Wert scheidet hier aber aus, da eine negative Anzahl von Lieferungen keinen Sinn hat. Trotzdem muss das zunächst eben festgestellt werden.

Damit ist der Wert n = (7,07…) zwar ein Extremwertkandidat, die mathematische Bestätigung erfordert jedoch den Wert der zweiten Ableitung an der Stelle (7,07…).

Die zweite Ableitung der Kostenfunktion K(n) lautet:

$$K''(n) = \frac{6000}{n^3}$$

An der Stelle n = (7,07…) ergibt sich definitiv ein positiver Wert für die zweite Ableitung. Damit ist die Existenz eines Minimums an dieser Stelle nachgewiesen:

$$K''(7{,}07\ldots) = \frac{6000}{(7{,}07\ldots)^3} = 16{,}9705\ldots > 0$$

Zum Schluss dieser Aufgabe sei noch die Kostenfunktion graphisch dargestellt (vgl. Bild 5.17):

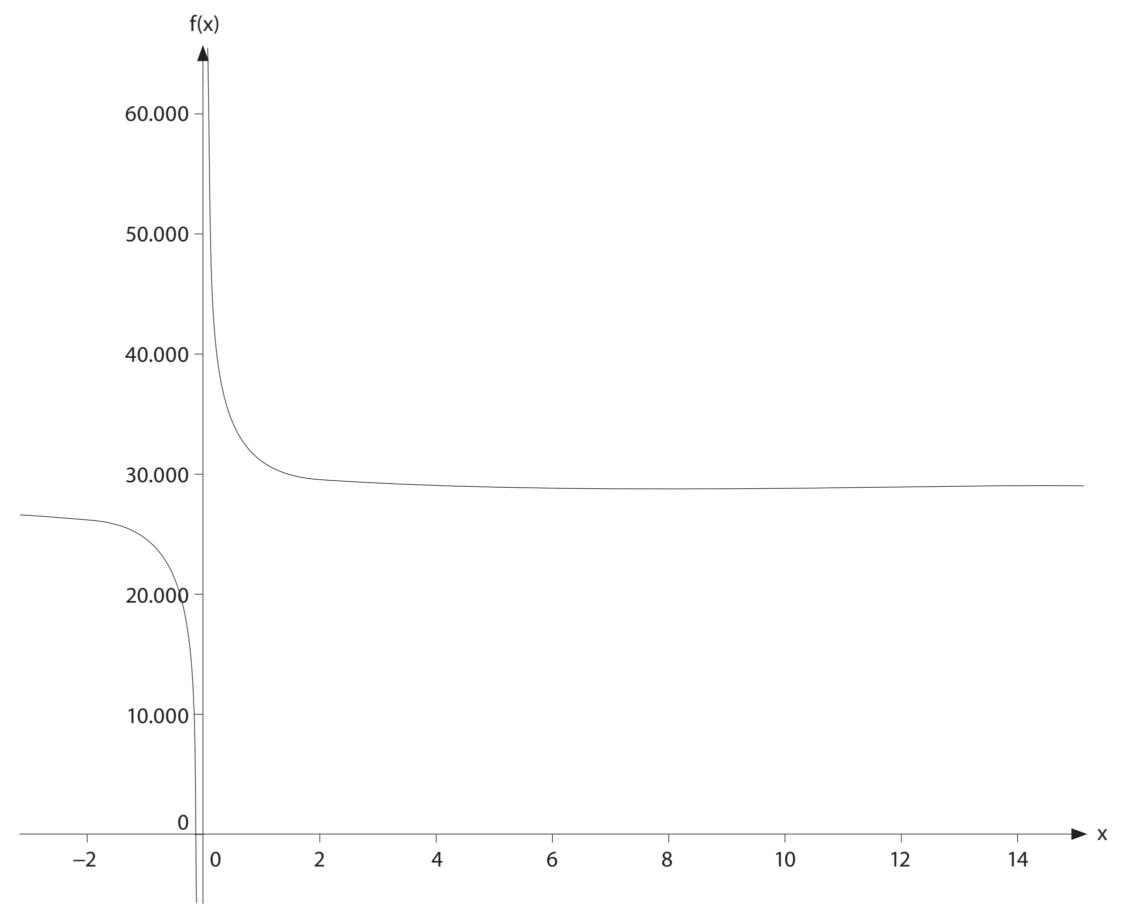

Bild 5.17 Kostenfunktion f(x) = 28.000 + 60x + 3.000/x (vgl. Gl. 5.45)

Gut erkennbar ist die Unstetigkeitsstelle für n = 0. Das leuchtet ein, da eine Anzahl von Lieferungen, die gleich Null ist, sinnlos ist. Das Minimum an der Stelle n = (7,07…) ist nicht so deutlich zu erkennen, wie in manch anderer Funktion. Das liegt daran, dass sich die Liefer- und Lagerkosten in einem sehr schmalen Intervall weitgehend die Waage halten und der Ausschlag an der Extremstelle nur sehr gering ist. Trotzdem existiert diese Stelle.

5.6.3 Volumenmaximierung

Als letztes Beispiel zu den Extremwertaufgaben sei noch einmal ein geometrisches Problem aufgeführt.

Von einem rechteckigen Stück Blech mit einer Länge von a = 16 cm und einer Breite von b = 10 cm werden an den Ecken kongruente (deckungsgleiche) Quadrate ausgeschnitten und aus dem Rest wird eine Schachtel gebildet (vgl. Bild 5.18):

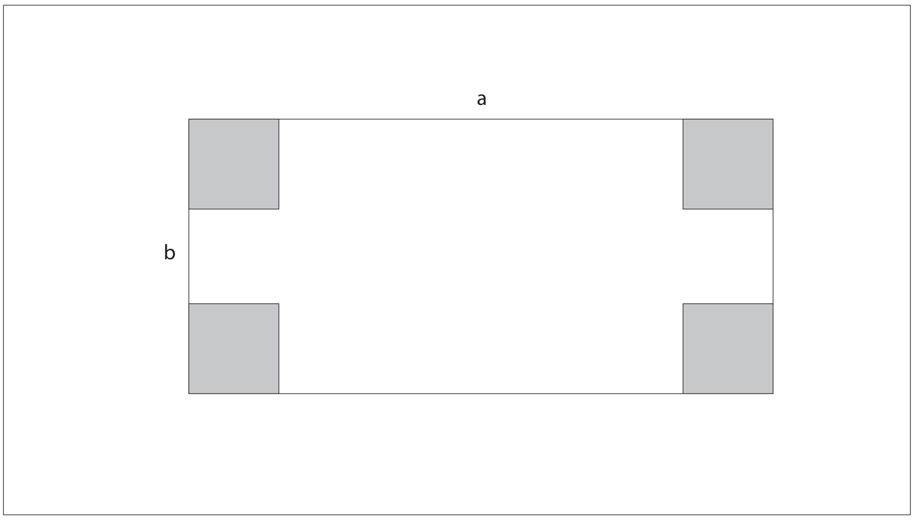

Bild 5.18 Zeichnung zur Extremwertaufgabe „Volumenmaximierung"

Wie muss man die Seitenlänge der auszuschneidenden Quadrate wählen, um eine Schachtel von größtem Rauminhalt zu erhalten? Wie groß ist dieser maximale Inhalt?

Das Volumen eines Quaders – und das ist ja unsere Schachtel letztendlich – ergibt sich aus dem Produkt der Grundfläche und der Höhe. Wenn wir nun die Seitenlänge der Quadrate mit x bezeichnen, ergibt sich für das Volumen V des Quaders folgende Gleichung:

$$V(x) = (a - 2x) \cdot (b - 2x) \cdot x \tag{5.47}$$

Wenn wir nun für a und b die gegebenen Werte einsetzen, erhalten wir:

$$V(x) = (16 - 2x) \cdot (10 - 2x) \cdot x = 4x^3 - 52x^2 + 160x \quad (\text{mit } 0 < x < 5) \tag{5.48}$$

Das Intervall für x ergibt sich daraus, dass, wenn x gleich 5 wäre, die gesamte Seite b weggeschnitten wäre und damit die Aufgabenstellung nicht zu erfüllen wäre.

Um nun das x für das maximale Volumen zu erhalten, muss die Funktion V(x) aus Gl. 5.48 abgeleitet werden:

$$V'(x) = 12x^2 - 104x + 160 \tag{5.49}$$

Die erste Ableitung wird gleich Null gesetzt und das x bestimmt, das diese Gleichung erfüllt:

$$V'(x) = x^2 - \frac{26}{3}x + \frac{40}{3} = 0 \rightarrow x_{1,2} = \frac{26}{6} \pm \sqrt{\left(\frac{26}{6}\right)^2 - \frac{40}{3}} \tag{5.50}$$

Aus der Gleichung resultieren dann folgende Werte für x:

$$x_1 = 2\,;\; x_2 = \frac{20}{3} \tag{5.51}$$

Der Wert für x_1 kommt als Extremwertkandidat in Frage. Der Wert x_2 scheidet aus, da 20/3 größer als 5 ist (s. Gl. 5.48).

Wir bestimmen nun die zweite Ableitung der Volumenfunktion (Ableitung von Gl. 5.49), um festzustellen, ob an der Stelle x = 2 ein Extremwert existiert:

$$V''(x) = 2x - \frac{26}{3} \rightarrow V''(2) = 4 - \frac{26}{3} = -\frac{14}{3} < 0 \tag{5.52}$$

Damit haben wir nachgewiesen, dass der einzige Extremwert unserer Volumenfunktion an der Stelle x = 2 liegt und dieser ein Maximum ist.

Nun setzen wir diesen Wert in die Volumenfunktion der Gleichung 5.48 ein und erhalten:

$$V(2) = (16 - 2 \cdot 2) \cdot (10 - 2 \cdot 2) \cdot 2 = 144 \tag{5.53}$$

Das auf diese Weise erzielte maximale Volumen beträgt 144 cm^3.

Zum Schluss der Bearbeitung dieser letzten Extremwertaufgabe schauen wir uns auch hier die graphische Darstellung der Volumenfunktion (s. Gl. 5.48) an (vgl. Bild 5.19):

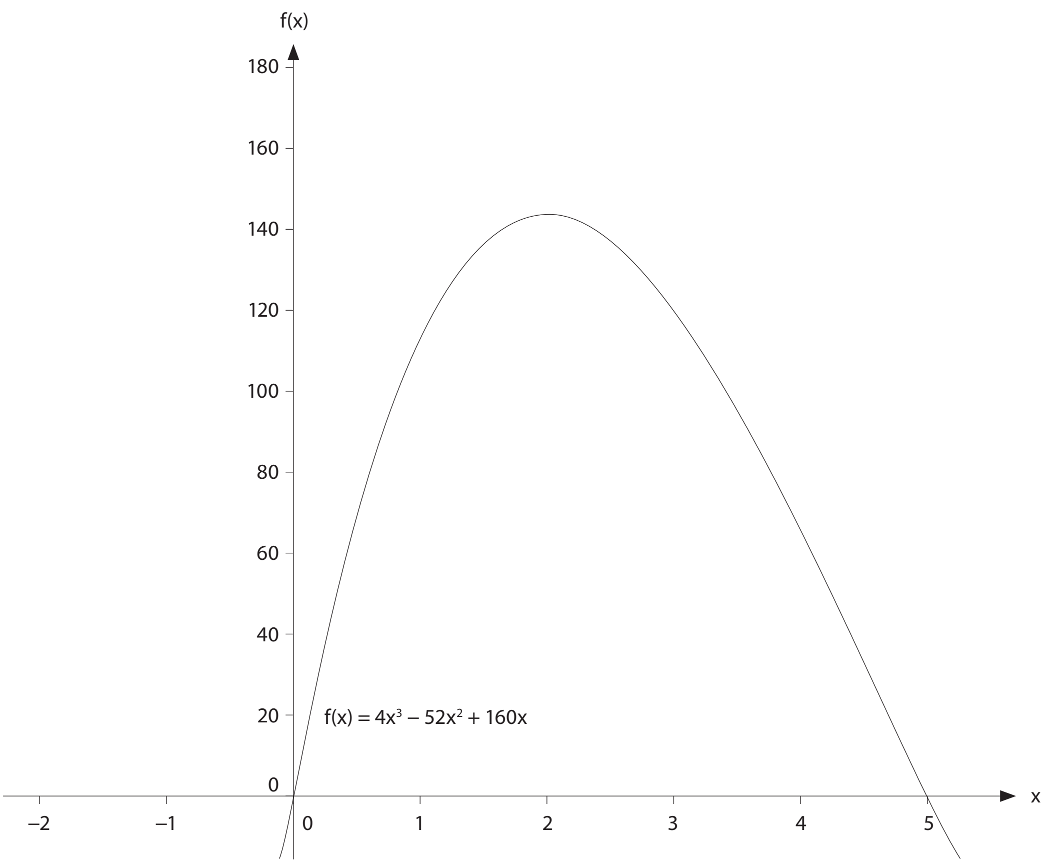

Bild 5.19 Volumenmaximierung mit $f(x) = 4x^3 - 52x^2 + 160x$ (vgl. Gl. 5.48)

☺ Nach dem Ende der Vorlesung zu den Extremwertaufgaben sind Antje, Judith und Martin zwar recht geschafft, aber auch begeistert. Martin meint, dass er selten so praxisnahe Beispiele im Fach Mathematik gesehen hat und trotzdem fast wie nebenbei einiges an Theorie mit aufgenommen hat. Die drei Freunde sind sich einig, dass sich ihr Mathematikverständnis schon erheblich verbessert hat. Trotzdem reicht es erst einmal, sagen sie sich und gehen nach Hause – jedoch nicht ohne eine gewisse Vorfreude auf den nächsten Tag. Da stehen die Kurvendiskussionen auf dem Plan.

Exkurs

Zur Vertiefung des gerade behandelten Gebietes sollten Sie nun **Anlage 4 „Angewandte Extremwertaufgaben"** (s. Studienbrief 2-040-0011, SCHOENING et al., 2011) durcharbeiten.

Übungsaufgabe

Ü 5.2 Es sollen oben offene Verpackungskartons hergestellt werden. Die Breite soll ein Drittel der Länge und das Volumen soll 18 Liter betragen. Es sind die Masse eines Kartons derart zu bestimmen, dass der Materialverbrauch dafür minimal wird.

5.7 Kurvendiskussionen

Wir erinnern uns an das Bild 5.1, das aufgrund der Wertetabelle (Tabelle 5.1) erstellt wurde. Es hatte noch nicht viel mit dem genauen Graphen der Funktion gemein, wie ein Blick auf Bild 5.2 zeigte.

Das zweite, genauere Bild wurde mit einem Funktionenplotter erstellt. Das ist zwar recht hilfreich, fördert alleine aber nicht das Verständnis für die Eigenschaften einer Funktion und ihre graphische Darstellung.

Studienziele

- Mit Hilfe der Kurvendiskussion werden wir wesentliche Eigenschaften und markante Punkte der Funktion mit den Instrumenten der Differentialrechnung bestimmen.

Wenn diese dann in ein Koordinatensystem übertragen werden, kann man die Punkte entsprechend beruhigt verbinden, ohne Gefahr zu laufen, wichtige Punkte, wie zum Beispiel einen Extremwert, vergessen zu haben. Genau das war aber das Problem, als wir mit Wertetabellen gearbeitet haben.

In diesem Abschnitt werden drei ausgewählte **Funktionen** systematisch untersucht. Wir werden dabei jeweils folgende **Merkmale** betrachten:

1. Stetigkeit,
2. Differenzierbarkeit,
3. Nullstellen,
4. Symmetrie,
5. Verhalten im Unendlichen,
6. Extremwerte,
7. Wendepunkte,
8. Krümmungsverhalten und
9. Monotonie.